

Kopf und Zahl

JOURNAL

des Vereins für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.
in Zusammenarbeit mit den Mathematischen Instituten
zur Behandlung der Rechenschwäche

40. AUSGABE, Herbst 2024

www.dyskalkulie.de



Vorteilhafte Rechenstrategien kennen

Grundlegendes zu Rechengesetzen in der Grundschule

Katja Rochmann, Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen

Die wichtigsten Gesetze der Algebra, wie das Assoziativgesetz, das Kommutativgesetz und das Distributivgesetz¹, sind für den Stoff der weiterführenden Schule bzw. für komplexere Zahlen von Bedeutung. Doch sind sie eigentlich für das Rechnen in der Grundschule von Nutzen? „Lohnt sich eine Befassung damit bereits zu diesem Zeitpunkt?“ „Ja, unbedingt!“ „Warum?“ „Rechengesetze sind von zentraler Bedeutung, denn sie spielen bei Rechenvereinfachungen und als Rechenkontrolle eine wichtige Rolle.“ Bereits früh im Stoff der Grundschule bilden sie das Fundament, um Zahl- und Aufgabenbeziehungen beim Rechnen zu nutzen.² Aus diesem Grund beschäftigen wir uns in Kopf und Zahl mit diesem Thema.

Beziehungen zwischen Aufgaben zu verstehen, ist eine elementare Voraussetzung für ein souveränes Rechnen. Schüler lernen sie als Rechenvorteile/Rechenstrategien kennen. Insbesondere beim Kopfrechnen ist der Zugriff auf bereits beherrschte Aufgaben (sog. Hilfsaufgaben) zur Berechnung anderer Aufgaben von großem Nutzen. Hierfür bilden Rechengesetze die Grundlage. Den Rechengesetzen ist ge-

¹ Die Bezeichnungen stammen aus dem Lateinischen: „assoziare“ bedeutet „verbinden/verknüpfen“, „commutare“ bedeutet „vertauschen“ und „distribuere“ bedeutet „verteilen/auseinanderlegen“.

² Siehe auch Bildungsportal NRW „Rechenschwierigkeiten vermeiden“, Stand: September 2020, Seite 28. www.schulministerium.nrw/system/files/media/document/file/Handreichung_Rechenschwierigkeiten_vermeiden.pdf, aufgerufen am 19.03.2024

meinsam, dass bei der Verknüpfung von Aufgaben der Wert der Aufgabenterme gleich ist. Anders ausgedrückt: Das Ergebnis ändert sich nicht. Daher lassen sich die Aufgaben mittels Gleichheitszeichen aneinanderfügen. Dadurch reduziert sich beim (Kopf-)Rechenvorgang der Merkaufwand auf lediglich eine Aufgabe, Teilergebnisse entfallen.

Ein erster Kontakt mit Rechengesetzen findet im Fachunterricht der 1. Klasse im Stoffgebiet Addition statt: das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz. Angewendet werden Rechengesetze in der Grundschule in der Regel, ohne ihre formale mathematische Bezeichnung zu erlernen. Später, in der Algebra, werden die Rechengesetze abstrakt durch sogenannte „allgemeine Zahlen“ beschrieben, die durch Buchstaben Symbole anstatt durch Zahlensymbole ausgedrückt werden. Exemplarisch:

- das Kommutativgesetz:
 $a+b=b+a \Rightarrow 8+5=5+8$
- das Assoziativgesetz:
 $(a+b)+c=a+(b+c) \Rightarrow (8+5)+5=8+(5+5)$

Inhalt

Vorteilhafte Rechenstrategien kennen	
Grundlegendes zu Rechengesetzen in der Grundschule	1
„Beim ‚=‘ da muss ich rechnen!“	
Das Gleichheitszeichen: Oftmals missverstanden	7
Ist es sinnvoll, sich mit Tauschaufgaben auf multiplikative Sachsituationen zu beziehen?	10
Impressum	11



Das Kommutativgesetz

Sogenannte Tauschaufgaben basieren auf dem Kommutativgesetz: Die Reihenfolge der Summanden kann vertauscht werden, ohne dass sich der Wert der Summe verändert. Die Kenntnis hierüber reduziert für Erstklässler den Aufwand beim Automatisieren des Einspluseins ganz erheblich, nämlich um die Hälfte der Aufgaben. Beim Rechnen im Stoff der zweiten und der nachfolgenden Klassen, ermöglicht das Kommutativgesetz bei Additionen mit mehreren Summanden, deren Reihenfolge so zu variieren, dass bspw. mittels Zehner-/Hunderterbildung etc. der Summenwert einfacher zu ermitteln ist: „ $26+37+14+13=26+14+37+13$ “.³

Das Assoziativgesetz

Dem Addieren über den Zehner liegt im Wesentlichen das Assoziativgesetz zu Grunde. Im Zahlenraum bis zwanzig ermöglicht das Kennen und Nutzen dieses Rechengesetzes in Verbindung mit der Zahlzerlegung oder dem Verdoppeln einen Spielraum für das Berechnen von Additionen, die Summanden können beliebig gruppiert werden. So kann $8+7$ als $(8+2)+5$, als $(7+7)+1$ oder $(5+5)+(3+2)$ zur Lösung gebracht werden. Rechenstrategien, die auf dem Assoziativgesetz beruhen, finden ihre Anwendung insbesondere im höheren Zahlenraum, denn die Assoziativität erweitert im Zahlenraum bis hundert und darüber hinaus die Zerlegungsmöglichkeiten größerer Zahlen. In Kombination mit dem Kommutativgesetz wird dadurch bei vielen Aufgaben eine große Flexibilität im Lösungsweg erzielt. Exemplarisch: $57+43+67$, gerechnet als $(57+3)+40+67$, als $(40+60)+(3+7)+57$ oder als $50+(43+7)+67$.

Beide Rechengesetze haben auch in der Multiplikation einen gewichtigen Stellenwert.

Das Verknüpfen von Einmaleinsaufgaben mittels Tauschaufgaben (Kommutativgesetz) reduziert den Merkaufwand für das gesamte Einmal-

eins deutlich, analog dem Einspluseins. Was in der Phase des Automatisierens eine Vereinfachung darstellt, ist in der Phase des Verstehens der Multiplikation jedoch eine Erschwernis. Die Verschiedenheit von Multiplikator und Multiplizierten zu begreifen und zu verinnerlichen, ist anspruchsvoll. Eine frühe Fokussierung auf „das Ergebnis bleibt gleich“, erschwert den Zugang zur unterschiedlichen Bedeutung von Wie-oft-Zahl und gegebener Anzahl. Der mathematische Gehalt von $6 \cdot 8$ ($8+8+8+8+8+8$) ist nicht der gleiche wie von $8 \cdot 6$ ($6+6+6+6+6+6+6$). Verbindungen unter den Malaufgaben, wie das Vertauschen der Faktoren, sind erst dann eine Hilfe, wenn die Bedeutung der Operanden zuvor verstanden ist. Bestehen Unsicherheiten, sind fehlerhafte Produktwerte wie $6 \cdot 8=46$ oftmals eine Folge davon. Gerechnet wurde $5 \cdot 8=40$, $1 \cdot 6=6$, $40+6=46$. Deshalb: Bitte einen Schritt nach dem anderen machen!

Ist hingegen die Grundvorstellung von der Multiplikation erarbeitet und gefestigt, sind Rechengesetze für das Automatisieren des Einmaleins hilfreich. Hierzu zählt, neben dem Kommutativgesetz, das bereits erwähnte Assoziativgesetz. Die Verbindungen zwischen den Multiplikationen systematisch nutzen zu können, versetzt einen Rechner in die Lage, bspw. das $1 \cdot 6$ als Verdoppelung des $1 \cdot 3$ zu denken: $2 \cdot 6=(2 \cdot 3) \cdot 2=12$, $3 \cdot 6=(3 \cdot 3) \cdot 2=18$ usw. Ebenso kann man über die Verdoppelung von $2 \cdot 25$ das Produkt $4 \cdot 25$ berechnen ($50+50=100$). Ein Gedankenspiel oder Selbstversuch: Mit dieser Einsicht ist es nur ein kleiner Schritt, abgeleitet aus $3 \cdot 37=111$, den Produktwert von $24 \cdot 37$ als Kopfrechenaufgabe zu ermitteln.

Eine sinnvolle Anwendung finden die Rechengesetze auch dann, wenn Multiplikationen mit mehreren Faktoren zu bewältigen sind. Diese können beliebig miteinander verbunden werden: $4 \cdot 3 \cdot 5=3 \cdot (4 \cdot 5)=3 \cdot 20=60$.

Von großem Vorteil sind die Rechengesetze im erweiterten Zahlenraum, bspw. bei sogenannten Kettenaufgaben. Nachfolgend zwei Beispiele, entnommen aus: Landesbildungsserver Baden-Württemberg: Rechengesetze⁴

³ Nicht selten erleben wir in unseren Lerntherapien, dass das Kommutativgesetz als vorgegebene „Bedienungsanleitung“ trainiert wird, ohne jedes Verständnis. So werden mit dem Hinweis auf „Tauschaufgabe“ auch Subtraktionen bearbeitet, indem Subtrahend und Differenzwert vertauscht werden: Aus $8-5=3$ wird $8-3=5$. Durch diesen Tausch verändert sich die Rechenoperation - Änderung der Mächtigkeit des Subtrahenden - so, dass das Ergebnis einen anderen Wert erhält. Die Bedingung des Kommutativgesetzes, „Vertauschen, ohne dass sich das Ergebnis ändert“, ist nicht gegeben, denn $8-5 \neq 8-3$. Anschaulich wird die Unterschiedlichkeit beider Aufgaben, wenn deren mathematischer Gehalt in Rechengeschichten eingekleidet wird. Gelegentlich führt die Denkweise „Bedienungsanleitung“ sogar dazu, Gesamtmenge und Teilmenge zu tauschen, aus $8 \cdot 5$ wird $5 \cdot 8$. Analoges gilt bei Divisionen: $16:4 \neq 4:16$.

⁴ Aus: <https://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/mathematik/unterrichtsmaterialien/sekundarstufe1/zahl/ter/term5/regel>, aufgerufen am 08.02.2024

Summe:
 $341 + 173 + 59 + 27$

$$\begin{array}{r} \underbrace{173 + 27}_{200} + 59 + 341 \\ = 200 + 59 + 341 \\ = 259 + 341 \\ = 600 \end{array}$$

Produkt:
 $4 \cdot 54 \cdot 10 \cdot 25$

$$\begin{array}{r} \underbrace{4 \cdot 25}_{100} \cdot 10 \cdot 54 \\ = 100 \cdot 10 \cdot 54 \\ = 1000 \cdot 54 \\ = 54000 \end{array}$$

$$3 \cdot (50 + 6) = 3 \cdot 50 + 3 \cdot 6$$

Ausklammern:

Umgekehrt gilt: Kommt in einer Summe aus Produkten ein gemeinsamer Faktor vor, darf man diesen auch ausklammern.

$$3 \cdot 50 + 3 \cdot 6 = 3 \cdot (50 + 6)$$

Das Verteilungsgesetz gilt auch für:

- Multiplikation von Differenzen Bsp.:
 $4 \cdot (15 - 6) = 4 \cdot 15 - 4 \cdot 6$
- Division von Summen Bsp.:
 $(15 + 6) : 3 = 15 : 3 + 6 : 3$
- Division von Differenzen Bsp.:
 $(15 - 6) : 3 = 15 : 3 - 6 : 3$

Das Distributivgesetz

Das Distributivgesetz bezieht sich auf das Verhalten zweier Rechenoperationen zueinander: Außerhalb der Klammer ist eine Punktrechnung gegeben und innerhalb der Klammer eine Strichrechnung.

Dieses Rechengesetz ist für das Automatisieren des Einmaleins⁵ von zentraler Bedeutung. Es erlaubt, jede Einmaleinsaufgabe in Teilschritte zu zerlegen und ist damit das Instrument, um Einmaleinsreihen mittels Kernaufgaben zu verinnerlichen. In Verbindung mit dem Addieren und Subtrahieren reduziert das Distributivgesetz die zentralen Einmaleinsaufgaben auf vier Grundaufgaben: $1 \cdot x$, $2 \cdot x$, $5 \cdot x$ und $10 \cdot x$. Exemplarisch und auszugsweise für die „Sechserreihe“ dargestellt: $4 \cdot 6 = 2 \cdot 6 + 2 \cdot 6$ oder $4 \cdot 6 = 5 \cdot 6 - 1 \cdot 6$, $7 \cdot 6 = 5 \cdot 6 + 2 \cdot 6$ bzw. $8 \cdot 6 = 10 \cdot 6 - 2 \cdot 6$.⁵

Die Kenntnis von der Faktorzerlegung ist nicht nur beim kleinen Einmaleins eine unverzichtbare Grundlage für effektive Lernstrategien. Sie ist darüber hinaus eine Stützfunktion für das spätere Erlernen des großen Einmaleins⁶, da sich auf dieser Grundlage Multiplikationen mit größeren Zahlen auf Multiplikationen mit kleineren Zahlen vereinfachen lassen: $27 \cdot 3 = (20 + 7) \cdot 3 = 20 \cdot 3 + 7 \cdot 3$ bzw. $3 \cdot 27 = 3 \cdot (20 + 7) = 3 \cdot 20 + 3 \cdot 7$.⁶

Die anschließenden Anwendungsbeispiele sind entnommen aus: Landesbildungsserver Baden-Württemberg: Terme/Rechengesetze⁷

Ausmultiplizieren:

Multipliziert man eine Summe (z. B. $50 + 6$) mit einer Zahl (z. B. 3), dann kann man auch jeden Summanden in der Klammer mit dieser Zahl multiplizieren und die Produkte addieren.

⁵ Wird das Einmaleins mithilfe der Kernaufgaben erlernt, kommt zudem in der zweiten Klasse eine Rechenregel zum Einsatz: Die Punkt-vor-Strich-Regel. Würde man die Multiplikation $7 \cdot 6 = 5 \cdot 6 + 2 \cdot 6$ ohne Berücksichtigung dieser Regel lösen - lediglich unter Beherrschung von „Gerechnet wird von links nach rechts“ - erhält man einen fehlerhaften Produktwert von 192 ($5 \cdot 6 = 30$, $30 + 2 = 32$, $32 \cdot 6$) statt 42.

⁶ Das Rechenzeichen, das „Malzeichen“, kann im distributiven Kontext unabhängig davon angewendet werden, ob es rechts oder links von einer Klammer steht.

⁷ Aus: <https://www.schule-bw.de/faecher-und-schularten/mathematisch-naturwissenschaftliche-faecher/mathematik/unterrichtsmaterialien/sekundarstufe1/zahl/ter/term5/regel>, aufgerufen am 08.02.2024

Für Aufgaben der Division ist das Distributivgesetz ebenfalls ein taugliches Instrument, um mathematische Anforderungen des Einsdurch-eins beim Kopfrechnen oder beim halbschriftlichen Dividieren mit weniger Rechenaufwand zu bewältigen. Beispielhaft soll hier der positive Aspekt bei Berechnungen wie $84:6$ und $318:6$ aufgezeigt werden. Das Distributivgesetz ermöglicht einen Zugriff auf bekannte Divisionen aus dem kleinen Einsdurch-eins: $84:6 = (60 + 24):6 = 60:6 + 24:6$. Insbesondere bei größeren Dividenden ist es eine hilfreiche Ausgangsbasis zum (schrittweisen) Rechnen. Der Dividend wird so in geeignete Vielfache des Divisors aufgeteilt, dass er einfacher zu berechnen ist. Die Resultate werden anschließend miteinander addiert oder voneinander subtrahiert: $318:6 = (300 + 18):6 = 300:6 + 18:6$ bzw. $288:6 = (300 - 12):6 = 300:6 - 12:6$.⁸

Das Konstanzgesetz

Eine nicht unbedeutende Rolle für ein sicheres und das Gedächtnis entlastendes Rechnen, sowohl beim reinen Kopfrechnen als auch beim halbschriftlichen Rechnen, spielt die Kenntnis vom Gesetz der Konstanz. Es begleitet Schüler und Lehrkräfte hinsichtlich der Strichrechnungen im Prinzip seit der 1. Klassenstufe, die besondere Nützlichkeit zeigt sich jedoch ab dem dezimalen Zahlenraum.

Das Konstanzgesetz besagt in Bezug auf

- die Addition, dass das Ergebnis gleichbleibt, wenn sich der eine Summand vergrößert und der andere Summand sich entsprechend verkleinert: $8 + 5 = 10 + 3$. Im erweiterten Zahlen-

⁸ Der Divisor kann ebenfalls in Teilschritte zerlegt werden. Dies ist jedoch zumeist keine Rechenvereinfachung.

raum sind analoge Vereinfachungen, bspw. $399+399+399=400+400+400-3$ oder $399+399+399=3\cdot 400-3$.

- die Subtraktion, dass das Ergebnis gleichbleibt, wenn sich Minuend und Subtrahend um die gleiche Anzahl vermehren oder vermindern: $8-5=9-6$ bzw. $8-5=7-4$. Ein Beispiel aus dem erweiterten Zahlenraum: $319-39=320-40$.
- die Multiplikation, dass das Ergebnis gleichbleibt, wenn man einen Faktor multipliziert und den anderen Faktor entsprechend dividiert: $8\cdot 4=16\cdot 2$ oder im höheren Zahlenraum $25\cdot 12=5\cdot 60$.
- die Division, dass das Ergebnis gleichbleibt, wenn man Dividend und Divisor mit dem gleichen Wert multipliziert oder dividiert: $24:4=48:8$ bzw. $24:4=12:2$ oder beispielhaft $140:35=280:70$.

Rechengesetze bilden den Hintergrund beim halbschriftlichen Rechnen

Das halbschriftliche Rechnen verknüpft die Grundrechenarten mit dem Dezimalsystem und nutzt die bereits aufgezeigten Rechengesetze. Leistungsschwächeren Schülern bietet es ab der 2. Klasse eine Unterstützung beim Kopfrechnen im erweiterten Zahlenraum. Für leistungsstarke Schüler ermöglicht es ein breites Spektrum an Anpassungen von Lösungsstrategien zum Bearbeiten der Aufgaben.

Obwohl das halbschriftliche Rechnen kein formalisiertes, normiertes Verfahren ist und den Schülern individuelle Rechenwege und Notationsweisen offenstehen, greift die Mehrzahl der Schüler auf zwei Standardverfahren zurück: Auf das schrittweise Rechnen oder das stellenweise Rechnen.⁹

Das schrittweise Rechnen hat den Vorteil, dass es für alle Grundrechenarten gleichermaßen eine verlässliche Rechenstrategie darstellt, denn es ist universell anwendbar: Bei Additionen wird i. d. R. der zweite Summand in seine Stellenwerte zerlegt – bei Subtraktionen ausschließlich der Subtrahend – und mit dem Teilergebnis weitergerechnet. Beim Multiplizieren werden komplexere Aufgabenterme in einfachere Aufgaben überführt und die Teilergebnisse abschließend zusammengefügt. Sind bspw. zwei zweistellige Faktoren gegeben, wird der erste oder der zweite Faktor in seine Stellenwerte zerlegt. Bei Divisionen erfolgt die Aufteilung des Dividenten in einfacher zu berechnende Vielfa-

che des Divisors. Auch hier werden die Teilergebnisse anschließend zusammengefügt.

$$\underline{27+55=82} \quad \underline{72-46=26} \quad \underline{18\cdot 15=270} \quad \underline{98:14=7}$$

$$27+50=77 \quad 72-40=32 \quad 18\cdot 10=180 \quad 70:14=5$$

$$77+5=82 \quad 32-6=26 \quad 18\cdot 5=90 \quad 28:14=2$$

- Grundlage für das schrittweise Addieren bzw. Subtrahieren ist das Assoziativgesetz: $27+55=27+(50+5)=(27+50)+5$ bzw. $72-46=72-(40-6)=(72-40)-6$
- Grundlage für das schrittweise Multiplizieren bzw. Dividieren ist das Distributivgesetz: $18\cdot 15=18\cdot(10+5)=18\cdot 10+18\cdot 5$ bzw. $98:14=(70+28):14=70:14+28:14$

Die Strategie des stellenweisen Rechnens, beide Zahlen des Aufgabenterms in ihre Stellenwerte zu zerlegen und einzeln zu berechnen („Stellenwerte extra“), ist hingegen nur begrenzt sinnvoll anzuwenden. Beim zehnerüberschreitenden Subtrahieren kommen Grundschüler an ihre Grenzen, da man mit dieser Rechenstrategie negative Teilergebnisse erhält. Negative Zahlen bzw. die Differenzierung von Rechenzeichen und Vorzeichen sind jedoch Unterrichtsstoff der weiterführenden Schule. Zudem erfordert der Rechenvorgang bei stellenüberschreitenden Subtraktionen einen Wechsel im operativen Vorgehen, da die Teilergebnisse additiv zusammengefügt werden. Bei Multiplikationen mit zweistelligem Zahlen macht diese Strategie – beide Faktoren werden in ihre Stellenwerte zerlegt – den Rechenvorgang schnell unübersichtlich bzw. verleitet zu Fehlern wie $18\cdot 15=140$ (gerechnet wurde: $10\cdot 10=100$, $8\cdot 5=40$). Das Bearbeiten von Divisionen ist auf diese Weise nur bei wenigen Aufgaben zu bewältigen. Hier ergeben sich zumeist Teilergebnisse, die nicht ohne Rest gelöst werden können.

Angesichts der Tatsache, dass für rechenschwächere Schüler der Zugang zu einem variantenreichen Rechnen naturgemäß stark eingeschränkt ist, raten wir bei der Einführung des halbschriftlichen Rechnens zu einer Normierung von Rechenwegen und Notation, sozusagen zu einem „Normalverfahren“, das die Schüler für alle vier Rechenarten nutzen können. Das schrittweise Rechnen ist dem stellenweisen Rechnen hierfür unserer Ansicht nach eindeutig zu bevorzugen, denn das stellenweise Rechnen stellt leistungsschwächere Rechner schnell vor eine Überforderung. Daher wäre auch bei der Unterrichtsplanung zu überlegen, welcher Schwerpunkt (verkürzt gesagt: Individualität oder Normierung?) bei der Vermittlung der Strategien für das halbschriftliche Rechnen gelegt werden soll.

⁹ Vgl. F. Padberg, Didaktik der Arithmetik, S. 180 ff, Spektrum Verlag, 3. erweiterte Auflage, Nachdruck 2007

Wie kann im Unterricht das Erkennen von Aufgabenbeziehungen gefördert werden?

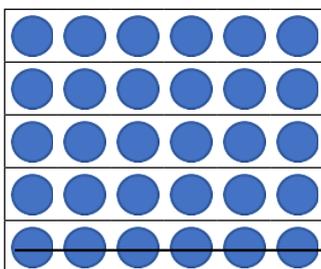
Hilfreiche Beziehungen zwischen Aufgaben zu entdecken, ist nicht selbstverständlich. Kinder müssen dies erst einmal herausarbeiten. Teilweise scheitern Kinder auch daran, dass ihnen noch die Voraussetzung für diesen Lernschritt fehlt: Die tragfähige Vorstellung von der jeweiligen Rechenoperation (siehe Fußnote 3). Fehlt diese Basis, werden Rechengesetze in der Konsequenz wie Rechentricks/begriffslose Schemata auswendig gelernt. Ihr Nutzen bleibt dem Zufall überlassen und ist nicht von längerfristigem Bestand.

Ist hingegen die Basis-Kompetenz vorhanden, sind Aufgaben hilfreich, die Lernende anleiten, mathematische Aussagen zu hinterfragen. Sie ebnen den Weg, um den Zusammenhang zwischen Aufgabe und Hilfsaufgabe zu sehen. Exemplarisch für das Kommutativgesetz, aufgezeigt im Zahlenraum bis zehn: Mirco sagt: „ $8+5=5+8$ “. Hat er recht? Wenn ja, warum ist das so? Geht das Vertauschen der Zahlen auch bei minus? Wenn nein, warum ist das so?

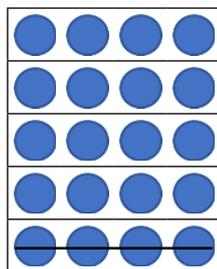
Eine weitere gute Unterstützung ist es, wenn Aufgabenbeziehungen nicht als Einzel-/Sonderfall ins Blickfeld rücken, sondern die gleiche Entdeckung bei möglichst vielen Aufgaben gemacht werden kann. Exemplarisch für das Distributivgesetz im Anwendungsbereich der Multiplikation:

Teilschritte, wie bspw. das Erarbeiten von $4 \cdot 6$ über ein Verdoppeln von $2 \cdot 6$ oder über $5 \cdot 6$ minus $1 \cdot 6$, sollten auch bei anderen Einmaleinsreihen vorgestellt und überprüft werden. Um ein Beispiel aufzuzeigen, nachfolgend dargestellt für $4 \cdot x = 5 \cdot x - 1 \cdot x$:

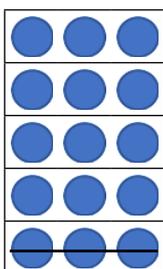
$$4 \cdot 6 = 5 \cdot 6 - 1 \cdot 6 = 30 - 6$$



$$4 \cdot 4 = 5 \cdot 4 - 1 \cdot 4 = 20 - 4$$



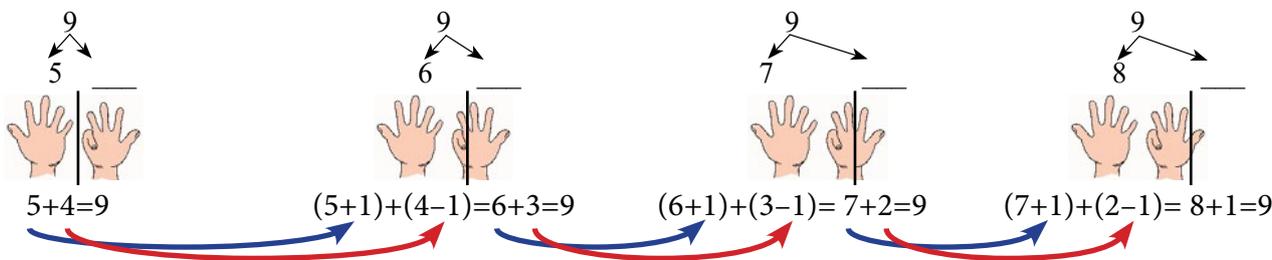
$$4 \cdot 3 = 5 \cdot 3 - 1 \cdot 3 = 15 - 3$$



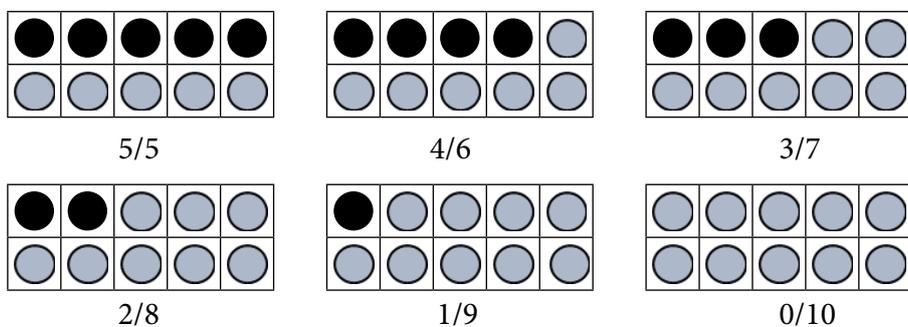
Beim Lösen von additiven und subtraktiven Kopfrechenaufgaben spielen Aufgabenbeziehungen in Form von Nachbareaufgaben ebenfalls eine wichtige Rolle, denn sie vereinfachen oftmals das Bewältigen von schwierigen Aufgaben. Eine Voraussetzung für die Anwendung dieser Rechenvereinfachung ist, dass die Verknüpfung der Aufgaben erkannt und nicht als „Trick“, der weiterhilft, um eine Aufgabe zu lösen, gedacht wird. Um den Lernprozess in dieser Hinsicht für die Strichrechnungen zu unterstützen, eignen sich Fragen wie „Was geschieht mit dem Ergebnis, wenn ich die erste Zahl um eins vermindere und die zweite Zahl um eins vermehre?“ „Ist das bei plus und bei minus gleich? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?“ bzw. „Wie kann ich eine Minusaufgabe verändern (fürs Rechnen vereinfachen), ohne dass sich das Ergebnis ändert?“ „Kennst du solche Aufgaben?“ „Kannst du sie für uns an die Tafel schreiben?“ Auch hier sollten wichtige Aufgabenmerkmale herausgearbeitet werden, die es dann in unterschiedlichen Aufgabenblöcken zu entdecken/wiederzufinden gilt.

Ebenfalls lohnt es sich, in diesem Zusammenhang noch einmal einen Blick auf den Eingangunterricht der ersten Klasse zu werfen: Einen Berührungspunkt mit dem Konstanzgesetz der Addition gibt es bereits bei der Zahlzerlegung im Zahlenraum bis zehn, d. h. bevor plus und minus eine Rolle spielen. Nicht selten wird im Unterricht eine Gesamtmenge mit einer stetigen Vermehrung einer Teilmenge um ein Element und der daraus folgenden Verminderung der anderen Teilmenge um ein Element eingeführt. Dieses Vorgehen wiederholt sich für die Zerlegungsblöcke aller Gesamtmengen bis zehn, geschieht zumeist materialunterstützt mit Fingerbildern, Muggelsteinen, Steckwürfeln usw. und mündet in die Verschriftung mit Zahlsymbolen. An diese materialunterstützte Vorstellung kann angeknüpft werden, wenn es im Verlauf der ersten Klasse um das Erkennen von Rechenvereinfachungen in additiven Operationen geht¹⁰ Auszugsweise einige Zerlegungen von neun und zehn sowie die daraus abgeleiteten Plusaufgaben:

¹⁰ Anhand der bildhaften Darstellung kann auch das Kommutativgesetz - die Beliebigkeit der Reihenfolge der Teilmengen für das Ganze - herausgearbeitet werden (sogenannte Tauschaufgaben).



Zerlegungen von 10



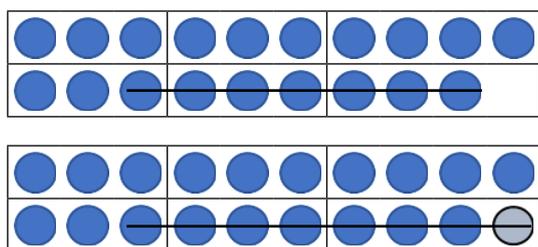
$5+5=10, 4+6=10, 3+7=10, 2+8=10, 0+10=10$

Den Plusaufgaben ist das gegensinnige Verändern (Konstanzgesetz bei Additionen) als Veränderung $+1/-1$ zu entnehmen.

Unter Vorgabe einer konstanten Gesamtmenge kann auch eine sich wiederholende Veränderung einer Teilmenge um bspw. $+2/-2$ thematisiert werden. „Welche Konsequenz hat die Verminderung um $+2$ bzw. -2 für die andere Teilmenge?“ Dieser Fragestellung kann im kleinen Zahlenraum gut mithilfe anschaulicher Darstellung nachgegangen werden, um dann die gemachte Erkenntnis mit der abstrakten Notation - auch bei Aufgaben im höheren Zahlenraum - zu verknüpfen. Die konkrete Veranschaulichung sollte so gestaltet werden, dass eine Gesetzmäßigkeit nachvollziehbar ist.

Das Konstanzgesetz der Subtraktion spielt ebenfalls eine wichtige Rolle für das flexible Rechnen. Aus unserer Erfahrung bereitet es Kindern mehr Mühe, hierfür ein Verständnis auszubilden als im additiven Kontext. Die nachfolgende Darstellung bietet eine Erörterungs-Grundlage für das gleichsinnige Verändern:

$19-7=(19+1)-(7+1)=20-8$ bzw.
die Kurzform $19-7=20-8$



Bezüglich der Punktrechnungen könnten hin-führende Fragestellungen sein: „Was passiert, wenn ich die erste Zahl verdopple (halbiere) und die zweite Zahl halbiere (verdopple)“ Ist das bei mal und geteilt gleich? Wenn ja, warum? Wenn nein, warum nicht?

Ganz allgemein gilt bei allen Entdecker- und Übungspäckchen, dass ein Bewusstwerden von Aufgabenbeziehungen gefördert wird, wenn der zentrale Fokus nicht nur auf das Aufgaben-Ergebnis gelegt wird. Es geht nicht nur um das Ergebnis, sondern ebenso um das Erkennen von Beziehungen zwischen Aufgaben und deren Ergebnissen bzw. um deren Nicht-Beziehung. Kurz gesagt, um ein „Warum ist es so?“

Grundschulkindern fällt es oft schwer, Beziehungen und Strukturen zwischen Aufgaben zu erkennen, selbst dann, wenn diese im Unterricht explizit thematisiert werden. Sie benötigen viel Zeit und eine gezielte Anleitung, um Zahl- und Aufgabenbeziehungen herstellen und nutzen zu können. Auch wenn dazu der umfangreiche Lehrplan - im Verhältnis zur gegebenen Unterrichtszeit - im Widerspruch steht, wäre es keine gute Wahl, auf das sorgfältige Herausarbeiten der Instrumente für ein flexibles Rechnen zu verzichten. Der Artikel ist ein Plädoyer dafür, hierauf Unterrichtszeit zu verwenden, denn ohne eine tiefergehende Einsicht in diese Strategien stehen Kindern bei neuen Zahlenräumen und neuen Aufgabenstellungen nur unzureichende Lösungsstrategien zur Verfügung.



„Beim ‚=‘ da muss ich rechnen!“

Das Gleichheitszeichen: Oftmals missverstanden

Katja Rochmann, Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen

Im Erlernen der mathematischen Symbolsprache gibt es insbesondere hinsichtlich der Bedeutung des Gleichheitszeichens oftmals große Missverständnisse. Diese haben zumeist ihren Ausgangspunkt darin, dass das Gleichheitszeichen in der Grundschule nicht im Sinne der algebraischen Gleichung behandelt wird. Vielmehr wird dieses zentrale mathematische Zeichen im Anfangsunterricht häufig sogar wie selbstverständlich angewendet, ohne es hinreichend zu thematisieren. Dies ist kritisch zu hinterfragen, denn die mathematische Bedeutung des Gleichheitszeichens ist vielen Schülern gar nicht bekannt. Wird das Gleichheitszeichen jedoch verwendet, bevor es erklärt wird, führt dies in der Regel zu Miss-/Fehlverständnissen.

So wird es in den ersten Schuljahren häufig als Aufforderung betrachtet, nach dem Zeichen „=“ das Ergebnis aufzuschreiben, bspw. „3 + 5, das ergibt/das sind 8.“ Etliche Schüler betrachten dieses mathematische Symbol im Sinne einer Trennung von „Aufgabe-Ergebnis“, sozusagen wie ein „Ergebniszeichen“, das seinen Ort in einer Rechnung an einer bestimmten Stelle hat: Erst kommt die Aufgabe, dann das Gleichheitszeichen und zum Schluss das Ergebnis. Für manche Schüler hat es auch den Charakter eines „Befehlszeichens“: „Immer wenn das ‚=‘-Zeichen auftaucht, muss ich rechnen!“ Das Gleichheitszeichen wird als formaler Auftrag zum Rechnen interpretiert.

Da ein derart falsches Verständnis für einfache Aufgaben – vom Resultat aus betrachtet – zunächst ohne Auffälligkeiten bzw. offensichtliche Fehler so gedacht und angewendet werden kann, ist die oben beschriebene Deutung des Gleichheitszeichens als „Ergebniszeichen“ nicht nur für rechenschwache Schüler sehr naheliegend. Allerdings verschließt sich damit den Schülern von Beginn an der Zugang zur Bedeutung des Gleichheitszeichens als Symbol für „ist gleichviel wie“. Dies hat zur Folge, dass ein tragfähiges Verständnis für den Stoff der weiterführenden Schule behindert wird bzw. nicht ausgebildet werden kann. Dominiert die „Ergebniszeichen“-Vorstellung, „wirft es mich bei der Algebra in den höheren Klassen aus der Kurve“ (Frau H. Gasteiger,

Professorin für Mathematikdidaktik an der Uni Osnabrück¹).

Verfestigt sich das falsche Verständnis, treten jedoch nicht erst in der Sekundarstufe, sondern bereits im Verlauf der Grundschule, Schwierigkeiten auf. So ist es Schülern teilweise noch in der 4. Klassenstufe keineswegs selbstverständlich, Gleichungen wie $2 + 4 = \square + 1$ zu bewältigen. Aufgrund des Missverstehens des Gleichheitszeichens stoßen einige Schüler schnell an ihre Grenzen und bearbeiten die genannte Anforderung – wenn überhaupt – als unwahre/falsche Aussage wie: „ $2 + 4 = \boxed{6} + 1$ “. In unseren Förderdiagnostiken beobachten wir nicht selten, dass sich Kinder bei Aufgaben wie $2 + 4 = \square + 1$ veranlasst sehen, eine Abänderung der Gleichung vorzunehmen, damit diese mit ihren Vorstellungen übereinstimmt: „ $2 + 4 = \boxed{6} + 1 = \boxed{7}$ “. Mit der gleichen Ratlosigkeit wird auch der Platzhalter bei sogenannten Lückenaufgaben, die nicht in der gewohnten Weise präsentiert werden, wie $\square - 3 = 7$ oder $17 = \square - 3$, vervollständigt, indem sozusagen über das Gleichheitszeichen hinweggerechnet wird: „ $\boxed{4} - 3 = 7$ “ bzw. „ $17 = \boxed{14} - 3$ “. Für manche Schüler ist diese Aufgabenstellung so befremdlich, dass sie vermuten: „Die Aufgabe ist falsch aufgeschrieben!“



¹ zitiert in „Mit der Lücke rechnen“, Der Spiegel Nr. 39, 23.09.2023, S. 40

Ein Fehlverständnis des Gleichheitszeichens führt nicht nur zu einem Unverständnis bei komplexeren Anforderungen, sondern auch zu einer sehr begrenzten Rechenfertigkeit und damit zum Ausschluss vom Begreifen etlicher Aufgabenstellungen sowie zielführender Lösungsstrategien. Bereits im Stoff der Grundschule spielt das Verständnis von Relationen, hier von der Äquivalenz als Gleichmächtigkeit von Mengen (gleichmächtige Kardinalzahlen), eine bedeutende Rolle. Stichwortartig und exemplarisch aufgeführt seien an dieser Stelle:

Zerlegungen: $7 = 2 + 5$ oder $7 = 3 + 4$

Tauschaufgaben: $3 + 4 = 4 + 3$

„Kraft der Fünf“: $7 + 6 = 5 + 5 + 2 + 1 = 10 + 3$

Verdoppelungen: $7 + 6 = 7 + 7 - 1 = 14 - 1$ oder $7 + 6 = 6 + 6 + 1 = 12 + 1$

Zehnerüberschreitungen: $6 + 7 = 6 + 4 + 3$ oder $13 - 7 = 13 - 3 - 4$

Rechenstrategien/Hilfsaufgaben:

$19 + 7 = 20 + 7 - 1 = 27 - 1$ oder

$23 - 9 = 23 - 10 + 1 = 33 + 1$

Platzhalteraufgaben: $17 = \square - 3$ oder $2 + 4 = \square + 1$

Multiplizieren mithilfe von Kernaufgaben:

$7 \cdot 8 = 5 \cdot 8 + 2 \cdot 8 = 40 + 16 = 56$

Großes Einmaleins mittels distributiver Teilschritte:

$17 \cdot 8 = 10 \cdot 8 + 7 \cdot 8 = 80 + 56 = 80 + 20 + 36$

Dividieren mittels distributiver Teilschritte:

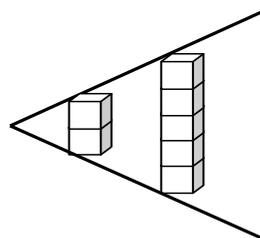
$56 : 4 = 40 : 4 + 16 : 4 = 10 + 4$

Ist ein Fehlverständnis erst einmal trainiert und etabliert, wird sich eine andere Sicht auf das Gleichheitszeichen nicht wie selbstverständlich durchsetzen. Diese „andere Sicht“ meint, das Gleichheitszeichen als Symbol für die Gleichwertigkeit auf beiden Seiten zu begreifen, z. B. „ $3 + 5$ ist gleichviel wie 8 “. Oder anders ausgedrückt: Egal ob Aussagen wie $1 \text{ Tag} = 24 \text{ Stunden}$, Rechnungen (Gleichheitszeichen als Verbindung von Term und Termwert) oder Gleichungen (Gleichheitszeichen als der Ausdruck von Wertgleichheit zweier Terme), es gilt, dass beide Seiten vom Gleichheitszeichen gleichberechtigt sind. Sie können daher auch grundsätzlich ausgetauscht werden ($24 \text{ Stunden} = 1 \text{ Tag}$, $3 + 5 = 8 \rightarrow 8 = 3 + 5$ bzw. $17 = \square - 3 \rightarrow \square - 3 = 17$).

Es ist daher unbedingt angeraten, die einseitige Sichtweise auf das Rechenzeichen „ $=$ “ im Sinne eines Handlungsauftrags, von der ersten Klasse

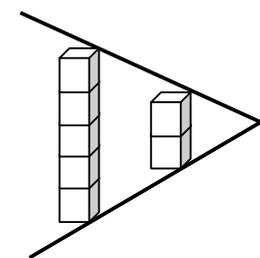
an zu vermeiden und das „Gleichviel-Verständnis“ zu etablieren. Das Gleichheitszeichen steht in der Mathematik als ein Zeichen für Anzahlvergleiche, bei denen eine Übereinstimmung in der Anzahl der Elemente vorliegt. Für andere quantifizierbare Zusammenhänge sind im Stoff der Grundschule die Zeichen $<$ und $>$ relevant. Die Vergleichszeichen $<$, $>$ und $=$ bilden eine Symbol-Familie. Dies zu verstehen und zu verinnerlichen, sollte von der ersten Klasse an eine Zielsetzung des Fachunterrichts sein.

Um eine Verwechslung der Symbole zu vermeiden, können Veranschaulichungen hilfreich sein. Wir empfehlen hierbei eine Reduzierung der visuellen Anreize, wie den Verzicht auf bspw. Tiermäuler. Aussagen wie: „Das Krokodil frisst die größere Zahl“ sind irreführend, weil sie sich nicht auf den Anzahlvergleich beziehen. Und lassen Sie ihre Schüler unbedingt im Schulbuch vorfindliche bzw. im Hausaufgabenheft selbstgeschriebene Notationen verbalisieren. In unseren Förderdiagnostiken fällt uns auf, dass etliche Kinder überfordert sind, wenn sie gebeten werden, Anzahlvergleiche wie bspw. $2 < 5$, $5 < 2$ und $5 = 5$ vorzulesen.



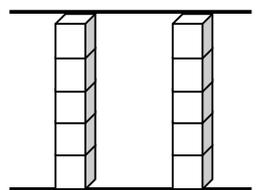
$2 < 5$

zwei ist kleiner als fünf



$5 > 2$

fünf ist größer als zwei



$5 = 5$

fünf ist gleichviel wie fünf

Als Lehrender muss man sich darüber im Klaren sein, dass der Vergleich mittels der aufgezeigten konkreten Veranschaulichung auf der Grundlage stattfindet, dass auf beiden Seiten Würfel gleicher Objektgröße vorhanden sind/sein müssen. Verglichen werden Anzahlen und zwar die der Einheits-Längen der Objekte. (Vertrauter ist die-

ses Vergleichskriterium wahrscheinlich aus der Arbeit mit dem Zahlenstrahl. Auch hier wird mit Längen operiert.) Zudem muss man präsent haben, dass es im Fortgang des Unterrichts auf der Zahlenebene ganz abstrakt um die Beziehung zwischen Zahlsymbolen geht, denn natürliche Zahlen sind Abstraktionen, sind eine allgemeine Vorstellung von Anzahlen.

Anzuraten ist weiter, ab dem Zeitpunkt, ab dem die Rechenzeichen + und – eingeführt werden und der Aufgabenterm ausgerechnet wird, beim Verbalisieren/Vorlesen auf den Sprachgebrauch „ist gleich“ oder „ist gleichviel wie“ hinzuwirken. Für den Verständnisprozess ist das Offenlegen von Gedanken notwendig, denn nur im Gespräch lässt sich überprüfen, ob eine Übereinstimmung von Gedachtem, sprachlicher Formulierung und mathematischem Symbol besteht. In unseren Lerntherapien fragen wir durchaus mal nach: „Warum heißt das Zeichen ‚=‘ eigentlich Gleichheitszeichen und nicht Ergebniszeichen?“

Selbstverständlich gilt auch hier: Eine Unterstützung für das Begreifen des Gleichheitszeichens ist es, nachfolgende oder ähnliche Notationen von den Schülern vorlesen zu lassen und im Unterricht auf ihren mathematischen Sinngehalt (bzw. Unsinn-Gehalt) hin zu überprüfen.

$8 = 6 + 2$ $8 = 9$ $8 = 10 - 2$
--

Fordern Sie ihre Schüler dazu auf, Aufgaben wie in den oben gezeigten Beispielen zu bewerten und ggf. zu verändern.

Auch das Verschriften von Lösungswegen bei Kopfrechenaufgaben bietet sich an, um eine tragfähige Sichtweise auf das Gleichheitszeichen zu thematisieren und zu festigen. Recht häufig haben Schüler Schwierigkeiten, die Teilschritte ihres Lösungsweges bei Kopfrechenaufgaben in die Schriftform zu übertragen. Das Aufschreiben von Lösungswegen wird im Unterricht eher selten besprochen. Die schriftliche Darstellung wird zumeist nur im Kontext des halbschriftlichen Rechenverfahrens eingeübt. Es macht jedoch durchaus Sinn, auch einer anderen Form der Verschriftung einen Stellenwert einzuräumen, der Notation von Kopfrechenstrategien. D. h. Aufgabe, Nebenrechnungen und Ergebnis durch den Einsatz des Gleichheitszeichens miteinander zu verknüpfen. Lösungswege auf diese Weise bewusst zu machen und die Schüler zu ei-

ner sorgfältigen Notation anzuhalten, fördert den verständigen Blick auf die Anwendung des Gleichheitszeichens als relationales Zeichen: Beide Seiten vom Gleichheitszeichen stimmen in der Anzahl der Elemente überein, sie sind äquivalent.²

Exemplarisch eine Anregung für das Erörtern von Notationen (mathematisch korrekten und unkorrekten): Wie kann man Aufgabe und Rechenweg nebeneinanderstehend – in einer „durchgehenden Reihe“ – und nicht untereinander, aufschreiben? Dieser Gesichtspunkt sollte für alle vier Grundrechenarten beim Thema Kopfrechnen in den Unterricht einbezogen werden.

<p>Lia sagt: „Bei meinem Rechenweg sind die Gleichheitszeichen richtig!“ Sie hat aufgeschrieben: $„65 + 8 = 65 + 5 + 3 = 70 + 3 = 73“$. Ist das richtig oder hat Lia Fehler gemacht?</p>

<p>Jetzt bist du dran. Schreibe deinen Rechenweg für die Aufgabe $26 + 8$ auf. Achte darauf, dass die Gleichheitszeichen richtig sind.</p> $26 + 8 = \square + \square + \square = \square + \square = \square$
--

<p>Stimmt diese Rechnung? Vergleiche die Aufgaben links und rechts vom Gleichheitszeichen. Was entdeckst du?</p> $4 + 7 + 2 + 6 + 8 + 3 = 4 + 6 + 7 + 3 + 2 + 8 = 10 + 10 + 10 = 30$
--

<p>Wie schreibst du den Lösungsweg für die Aufgabe $48 + 7$ auf? Welche Zahlen müssen in die leeren Kästchen?</p> $48 + 7 = \square + \square + \square = \square + \square = \square$

Ebenfalls können Schülern davon profitieren, wenn ihnen korrekte und fehlerhafte Verschriftungen von Rechenwegen zur Beurteilung vorgelegt werden. Exemplarisch drei verschriftete Rechenwege für die Aufgabe $16+7$ und die Fragestellung, ob die Verschriftungen mathematisch richtig bzw. falsch sind:

² siehe auch Hagemeister, Volker (2013): Grundsschulprobleme mit dem Gleichheitszeichen. MNU, Jg 66, Heft 7, 2013, Seite 393 ff

richtig oder falsch, kreuze an	richtig	falsch
$16 + 7 = 16 + 4 + 3 =$ $20 + 3 = 23$		
$16 + 7 = 16 + 4 + 3 = 23$		
$16 + 7 = 16 + 4 =$ $20 + 3 = 23$		

Es lohnt sich auf jeden Fall zu klären, warum die dritte Notation mathematisch eine unwahre Aussage ist. Die Beispiele lassen sich beliebig auf Subtraktionen bzw. zehnerüberschreitende Aufgaben mit zwei zweistelligen Operanden übertragen. Motivieren Sie ihre Schüler dazu, einen Term in einen anderen Term zu überführen. Um Grundschulern ein rationelles Verständnis von



Ist es sinnvoll, sich mit Tauschaufgaben auf multiplikative Sachsituationen zu beziehen?

Hans-Joachim Lukow, Osnabrücker Zentrum für mathematisches Lernen

In einem Artikel in der Neuen Osnabrücker Zeitung (NOZ) vom 17.08.2024 greift der Autor des Artikels, Patrick Kern, eine Diskussion zu der Multiplikationsaufgabe $5 \cdot 4 = 20$ auf, die im Internet auf der Plattform X stattgefunden hat.

Ausgangspunkt der Diskussion ist ein Bild mit dieser Multiplikationsaufgabe aus einem Grundschultest:

„Auf dem Bild sind vier Hände mit jeweils fünf ausgestreckten Fingern zu sehen, darüber steht die Aufgabe: „Schreibe die dazugehörige Plus- und Malaufgabe.“ Der Lösungsvorschlag des mutmaßlichen Schülers: „ $5 \times 4 = 20$ “. Eigentlich richtig, oder? Der Lehrer scheint das anders zu sehen, markiert die Lösung als falsch und schreibt darüber, dass „ $4 \times 5 = 20$ “ die richtige Lösung gewesen wäre.“¹

Die Reaktion der Lehrkraft, dies als fehlerhafte Lösung zu vermerken (und sicherlich auch entsprechend zu bewerten), sorgt für etliche Leserkommentare im Netz. Die Anmerkungen zu der Bewertung der Lehrkraft bilden ein breites Spektrum, das von Zustimmung mit Erläuterung des mathematischen Sachgehalts bis hin zu Kritik

¹ 5×4 ungleich 20 ? Wieso eine Matheaufgabe aus der Grundschule gerade für große Diskussionen sorgt. von Patrick Kern, <https://www.noz.de/deutschland-welt/panorama/artikel/5-x-4-ungleich-20-matheaufgabe-aus-der-grundschule-sorgt-fuer-hitze-debatte-47604956>, aufgerufen am 29.10.2024

Gleichungen zu ermöglichen, ist es wichtig, im Unterricht Anlässe zu schaffen, die es fördern, die Äquivalenz von Termen zu thematisieren. Denn für Kinder ist es nicht von vornherein naheliegend, in $16 + 7 = 16 + 4 + 3$ oder in $16 + 7 = 20 + 7 - 4$ die (An-)Zahläquivalenz zu erkennen, deren Zeichen das Gleichheitszeichen ist. Dies gilt insbesondere bei Aufgaben im erweiterten Zahlenraum.

Das Verstehen der mathematischen Bedeutung des Gleichheitszeichens ist eine wichtige Grundlage für das Begreifen-Können des aufbauenden Stoffes der weiterführenden Schule. Hier haben Terme/Termumformungen sowie Gleichungen mit und ohne Variable einen hohen Stellenwert. Das Fundament hierfür wird bereits in der 1. Klasse gelegt und im Laufe des Grundschulstoffs weiterentwickelt und gefestigt.

und Unverständnis mit Hinweisen auf Didaktik und Pädagogik reicht.

Wir wollen uns hier nicht in den vermutlich schwelenden Streit über die Bewertungskriterien der Leistung eines Schülers und deren Zweck sowie Wirkung auf die Betroffenen und Außenstehenden einmischen. Was uns dazu verlasst, dieses Thema aufzugreifen, ist die kontroverse Sichtweise auf die mathematische Auflösung des Schülers zur vorgelegten Veranschaulichung und Aufgabenstellung.

Die Erarbeitung des Einmaleins' ist nicht nur für rechenschwache Schüler eine Herausforderung. Die Multiplikation beinhaltet eine neue Abstraktionsleistung, wie sie in der bis dahin vertrauten Addition (auf die die Multiplikation aufbaut) so nicht verlangt wird: Bei der Addition spielt die Anzahl der Mengen beim Rechnen insofern eine Rolle, als dass alle Summanden abgearbeitet werden müssen. Ihr wird im Aufgabenterm keine Zahl zugeordnet; sie ist verkörpert in der Anzahl der Summanden. Bei der Plusaufgabe $5 + 5 + 5 + 5$ sind vier Mengen gegeben, die jeweils fünf Elemente enthalten. Insbesondere bei längeren Additionsaufgaben ist es sinnvoll, sich bei der Kontrolle des Rechenwegs zu vergewissern, ob alle Summanden beim Rechenvorgang berücksichtigt wurden. Dieser Vorgang nimmt gedanklich einen Bezug auf die Mengenzahl: „Ich habe viermal fünf gerechnet!“

Bei Malaufgaben findet sich die Anzahl der Mengen unmittelbar als Zahl in der Aufgabe wieder. Hier gibt die erste Zahl, der Multiplikator, die

Anzahl der Mengen an.² Der zweite Operand, der Multiplikand, benennt die Mächtigkeit der Elemente, die in jeder dieser Mengen enthalten ist.

Neu ist, dass Schüler ein unmittelbares Verständnis für die Mengenzahl entwickeln müssen: Wie oft sind gleichgroße Objekte zusammengefasst bzw. gebündelt? Die Bedeutung der Operanden wird bei der Multiplikation in der Terminologie Multiplikator (Wie-oft-Zahl) und Multiplikand („Was“ oder „Portion“ bzw. zu „Vervielfachendes“) ausgedrückt. Dieser komplexe Sachverhalt wird mit dem Operator „mal“ benannt. Wie oft kommen gleichgroße Portionen von Objekten in der Aufgabe vor? Dies ist der Fokus auf die Bedeutung, die den Zahlen in einer Malaufgabe zukommt.³ Für Grundschüler haben sich die Begriffe „Wie-oft-Zahl“ und „Was“ bzw. „Portion“ bewährt.

Es ist das Ziel bei der Einführung dieser Punkt-rechenart, den Kindern die unterschiedliche Bedeutung von Multiplikator und Multiplikanden einsichtig zu machen. Dazu eignen sich bildhaft veranschaulichte Malaufgaben und die dazugehörigen Plusaufgaben.

Wenden wir uns mit dieser Überlegung noch einmal dem Anlass der Diskussion auf Plattform X zu. Vermutlich wird die dem Schüler vorgelegte Abbildung in ähnlicher Weise ausgesehen haben:



In dieser bildhaften Darstellung der Plus- sowie Malaufgabe wird derjenige, der bereits verstanden hat, was „vier mal fünf“ bedeutet, unschwer den Zusammenhang zwischen Abbildung und Aufgaben erkennen und diesen mit $5 + 5 + 5 + 5$ und $4 \cdot 5$ verknüpfen. Ihm ist einsichtig, dass hier nicht vier Hände die vervielfachten Elemente

sind, sondern die fünf Finger. Eine Kommutativität liegt im bildhaft dargestellten Kontext nicht vor. Es passt nur:

$$5 \text{ Finger} + 5 \text{ Finger} + 5 \text{ Finger} + 5 \text{ Finger} = 4 \cdot 5 \text{ Finger} = 20 \text{ Finger.}$$

Während die Vertauschung der Operanden der Multiplikation (Behandlung als Faktoren) im abstrakten Kontext zulässig ist, verhält es sich im Zusammenhang mit einem konkreten Sachbezug anders. Hier kann die Anwendung der Kommutativität den praktischen Hintergrund negieren.

Um die Unterscheidung von Multiplikator (Wie oft) und Multiplikanden (Was) im kindlichen Verständnis zu festigen, bietet es sich an, in der Anfangsphase den Multiplikanden, die Anzahl der Elemente, nicht nur als Zahl zu verschriften. Fordern Sie die Schüler dazu auf, den Aufgabenterm zu verlängern und zusätzlich die Qualität der Elemente zu notieren, denn Elemente-Anzahlen sind immer Anzahlen von etwas. Nennen Sie bzw. die Schüler die Elemente „beim Namen“. Auch der Produktwert sollte ausführlicher aufgeschrieben werden, nämlich als Quantität und Qualität. So wie es oben dargestellt ist.

Abschließend ein Beispiel aus einem Arbeitsblatt des Osnabrücker Zentrums, das exemplarisch zeigt, wie eine Sachsituation hilft, die einzuführende Punkt-rechenart verständlich zu machen⁴:

Man kann plus oder mal rechnen.

Jeder Würfel hat ____ Punkte.

Schreibe die Plusaufgabe, die zu dem Bild passt: _____

Wie oft hast du 3 Punkte aufgeschrieben? Antworte im ganzen Satz.

Ich habe _____

Schreibe die Malaufgabe auf, die zu dem Bild passt.

Malaufgabe: _____

2 Eine Menge ist die Zusammenfassung/Bündelung von Objekten.

3 Die Unterschiedlichkeit drückt sich begrifflich in der Terminologie der Ergebniszahl aus: additiv als Summenwert und multiplikativ als Produktwert.

4 Vertiefend empfehlen wir einen Artikel aus dem Journal „Kopf und Zahl“ Ausgabe 31, 2019 https://www.os-rechenschwaech.de/wp-content/uploads/2019/06/KuZ_31_Osnabrueck.pdf Zehnerfeld, Multiplikations- und Divisionskarten zum Erarbeiten der Punkt-rechnungen



Verein für Lerntherapie und Dyskalkulie e.V.

Internet:
www.dyskalkulie.de
E-Mail:
verein@dyskalkulie.de

Impressum:

Herausgeber: Verein für Lern- und Dyskalkulietherapie, München, Briener Straße 48
Redaktion: Alexander v. Schwerin (verantwortlich), Beate Lampke, München
Hans-Joachim Lukow, Osnabrück
Christian Bussebaum, Düsseldorf;
Endkorrektur: Martina Schneider, Köln
Layout und Satz: Schmidt Media Design, München

Das IML Gifhorn ist umgezogen

Seit dem neuen Schuljahr finden Sie das Institut für Mathematisches Lernen in Gifhorn am neuen Standort. Die Therapieräume liegen ebenerdig in den Räumen der ehemaligen Kinderarztpraxis. Ein komfortabler Wartebereich und Parkplätze vor dem Haus sind vorhanden.

Unsere telefonische Fachsprechstunde

Von Dienstag bis Donnerstag von 12.00 bis 14.00 Uhr (jedoch nicht in den niedersächsischen Schulferien) können Sie sich unter 05371-9459598 von einem Lerntherapeuten telefonisch beraten lassen.



Institut für Mathematisches Lernen Gifhorn

38518 Gifhorn, Calberlaher Damm 124
www.iml-gifhorn.de info@iml-gifhorn.de
Tel. 05371-9459598, Fax 05371-9459599

Unsere Präsenz-Fortbildungen im Frühjahr 2025

Für schulinterne Fortbildungen ist mindestens ein halbes Jahr Vorlaufzeit einzuplanen. Seminaranfragen stellen Sie bitte an seminar@zahlbegriff.de oder rufen uns an unter 0531-12 16 77 50.



Das Kompetenzzentrum Lehrkräftefortbildung der TU Braunschweig bietet im folgenden Jahr die folgenden Seminare an.
Referent ist Dr. Michael Wehrmann

Prävention von Dyskalkulie im Basiszahlraum bis 10

Mi, 19.02.2025 und Mi, 25.02.2025, 15.00-18.00 Uhr
<https://www.nlc.info/app/edb/event/44911>

Arithmetische Lerninhalte der zweiten Klasse

Mi, 05.03.2025 und Mi, 12.03.2025, 15.00-18.00 Uhr
<https://www.nlc.info/app/edb/event/44912>

Arithmetische Kernkompetenzen dritte/vierte Klasse

Mi, 19.03.2025 und Mi, 26.03.2025, 15.00-18.00 Uhr
<https://www.nlc.info/app/edb/event/44913>

Eine Teilnahme ist für alle Lehrkräfte Niedersächsischer Schulen möglich. Eine Anmeldung können Sie direkt unter den oben angegebenen Links vornehmen.

IML

Institut für Mathematisches Lernen Braunschweig

Beratungs- und Forschungseinrichtung
zur Diagnose, Therapie und Prävention
der Rechenschwäche/Dyskalkulie

- ✦ Qualitative Förderdiagnose
- ✦ Wissenschaftliche Beratung
- ✦ Integrative Lerntherapie
- ✦ Spezifische Lehrerfortbildung

So erreichen Sie das IML Braunschweig

38100 Braunschweig, Steinweg 4 (Haltestelle Rathaus)
Telefon 05 31-12 16 77 50, Fax 05 31-12 16 77 59
per E-Mail: info@iml-braunschweig.de
im Internet: <http://www.iml-braunschweig.de>
Telefonsprechstunde: Di-Do, 12-14 Uhr
(nicht in den Ferien)

Schulinterne Lehrkräftefortbildung (SchiLF)

Wir sind offizieller Fortbilder des Kompetenzzentrums Lehrerfortbildung der TU Braunschweig und bieten u. a. folgende Seminare an:

- **Qualitative Diagnostik von Rechenschwäche**
Erkennen von Dyskalkulie im diagnostischen Gespräch
- **Prävention/Vorbeugung in der ersten Klasse**
Prozessbegleitende Beobachtung und Gegenstrategien
- **Rechenschwäche in der Sekundarstufe I**
Probleme mit Dyskalkulie in weiterführenden Schulen

Haben Sie Interesse an einer Veranstaltung, so fordern Sie von uns bitte unser ausführliches Fortbildungsprogramm an.

Abonnement unserer halbjährlichen Zeitschrift

Der Bezug von „Kopf und Zahl“ ist beim IML Braunschweig sowohl in elektronischer als auch in gedruckter Form möglich. Bitte beachten Sie hierfür das beiliegende Bestellformular.

Das IML Braunschweig ist Mitglied im



Arbeitskreis des Zentrums für
angewandte Lernforschung
(gemeinnützige Gesellschaft mbH)

<http://www.arbeitskreis-lernforschung.de>

Auf der Homepage finden Sie viele weitere Informationen zur Thematik Dyskalkulie, Buchtipps und einen Pressespiegel.